9　式の値，二項定理

64

(1)

$x=0$ は $x^2-3x-1=0$ の解ではないから，両辺を x で割ると，$x-3-\frac{1}{x}=0$　$\therefore x-\frac{1}{x}=3$

これより，

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=11$$

$$x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)=3\cdot(11+1)=36$$

(2)

$\alpha^2+\sqrt{3}\beta=\sqrt{6}$　・・・①　　$\beta^2+\sqrt{3}\alpha=\sqrt{6}$　・・・②　とすると，

①－②より，$\alpha^2-\beta^2-\sqrt{3}(\alpha-\beta)=0$　$\therefore(\alpha-\beta)\{(\alpha+\beta)-\sqrt{3}\}=0$

$\alpha\neq\beta$ より，$\alpha-\beta\neq 0$　$\therefore\alpha+\beta=\sqrt{3}$　・・・(答)

①＋②より，$\alpha^2+\beta^2+\sqrt{3}(\alpha+\beta)=2\sqrt{6}$

よって，$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\sqrt{3}(\alpha+\beta)=2\sqrt{6}$

これに $\alpha+\beta=\sqrt{3}$ を代入し，$\alpha\beta$ を求めると，$\alpha\beta=3-\sqrt{6}$　・・・(答)

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta}-2$$

$\alpha+\beta=\sqrt{3}$，$\alpha\beta=3-\sqrt{6}$ より，$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{3}{3-\sqrt{6}}-2$　$\therefore\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=1+\sqrt{6}$　・・・(答)

65

$\frac{yz}{x}=\frac{zx}{4y}$ より，$4y^2z=zx^2$　$\therefore z(x+2y)(x-2y)=0$

x, y, z は正の実数だから，$x-2y=0$　すなわち $x=2y$　・・・①

$\frac{yz}{x}=\frac{xy}{9z}$ より，$9yz^2=x^2y$　$\therefore y(x+3z)(x-3z)=0$

x, y, z は正の実数だから，$x-3z=0$　すなわち $x=3z$　・・・②

①，②より，$x:y:z=6:3:2$

よって，$x=6k,\ y=3k,\ z=2k$（k は正の実数）

$$\therefore\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{11}{7}$$

66

$(n^2+1)-n^2>0$，$(n+1)^2-(n^2+1)=2n>0$ より，$n^2<n^2+1<(n+1)^2$ $\therefore n<\sqrt{n^2+1}<n+1$

ゆえに，$a=n$，$b=\sqrt{n^2+1}-n$ ・・・(答)

$$\begin{aligned} a-\frac{1}{b} &= n-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}-n} \\ &= n-\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)} \\ &= -\sqrt{n^2+1} \end{aligned}$$

これと，$a-\dfrac{1}{b}=-\sqrt{37}$ より，$\sqrt{n^2+1}=\sqrt{37}$ $\therefore n=6$ ・・・(答)

67

$(x+1)^8(x-1)^4$ を展開したときの x^{10} の項の係数

解法 1

${}_8\mathrm{C}_8x^8\cdot{}_4\mathrm{C}_2x^2\cdot(-1)^2+{}_8\mathrm{C}_7x^7\cdot{}_4\mathrm{C}_1x^3\cdot(-1)^1+{}_8\mathrm{C}_6x^6\cdot{}_4\mathrm{C}_4x^4=2x^4$ $\therefore 2$

解法 2

$$\begin{aligned} (x+1)^8(x-1)^4 &= (x+1)^4\left\{(x+1)^4(x-1)^4\right\} \\ &= (x+1)^4(x^2-1)^4 \\ &= (x^3+x^2-x-1)^4 \end{aligned}$$

$(x^3)^p\cdot(x^2)^q\cdot(-x)^r\cdot(-1)^s$ を x^{10} の項とすると，$3p+2q+r=10$ かつ $p+q+r+s=4$ より，

$p=3,\ q=0,\ r=1,\ s=0$ または $p=2,\ q=2,\ r=s=0$ $\therefore \dfrac{4!}{3!\cdot0!\cdot1!\cdot0!}\cdot(-1)^1\cdot(-1)^0+\dfrac{4!}{2!\cdot2!\cdot0!\cdot0!}=2$

$(x^2+x+1)^6$ を展開したときの x^{10} の項の係数

$(x^2)^p\cdot x^q\cdot1^r$ を x^{10} の項とすると，$2p+q=10$ かつ $p+q+r=6$ より，

$p=5,\ q=0,\ r=1$ または $p=4,\ q=2,\ r=0$ $\therefore \dfrac{6!}{5!\cdot0!\cdot1!}+\dfrac{6!}{4!\cdot2!\cdot0!}=21$

68

$$
\begin{aligned}
(100.1)^7 &= \left(10^2+10^{-1}\right)^7 \\
&= {}_7\mathrm{C}_0\left(10^{-1}\right)^7 + {}_7\mathrm{C}_1\left(10^2\right)^1\left(10^{-1}\right)^6 + {}_7\mathrm{C}_2\left(10^2\right)^2\left(10^{-1}\right)^5 + {}_7\mathrm{C}_3\left(10^2\right)^3\left(10^{-1}\right)^4 \\
&\qquad + {}_7\mathrm{C}_4\left(10^2\right)^4\left(10^{-1}\right)^3 + {}_7\mathrm{C}_5\left(10^2\right)^5\left(10^{-1}\right)^2 + {}_7\mathrm{C}_6\left(10^2\right)^6\left(10^{-1}\right)^1 + {}_7\mathrm{C}_7\left(10^2\right)^7 \\
&= 10^{-7} + 7\cdot 10^{-4} + 21\cdot 10^{-1} + 35\cdot 10^2 + 35\cdot 10^5 + 21\cdot 10^8 + 7\cdot 10^{11} + 10^{14} \\
&= 10^{14} + 7\cdot 10^{11} + (2\cdot 10+1)\cdot 10^8 + (3\cdot 10+5)\cdot 10^5 + (3\cdot 10+5)\cdot 10^2 + (2\cdot 10+1)\cdot 10^{-1} \\
&\qquad + 7\cdot 10^{-4} + 10^{-7} \\
&= 10^{14} + 7\cdot 10^{11} + 2\cdot 10^9 + 10^8 + 3\cdot 10^6 + 5\cdot 10^5 + 3\cdot 10^3 + 5\cdot 10^2 + 2 + 10^{-1} \\
&\qquad + 7\cdot 10^{-4} + 10^{-7}
\end{aligned}
$$

より，百の位の数字は 5，小数第 4 位の数字は 7

69

(1)

$$
\begin{aligned}
21^{10} &= (20+1)^{10} \\
&= \sum_{k=0}^{10} {}_{10}\mathrm{C}_k(20)^k \\
&= 20^2\sum_{k=2}^{10} {}_{10}\mathrm{C}_k(20)^{k-2} + {}_{10}\mathrm{C}_0 + {}_{10}\mathrm{C}_1 20^1 \\
&= 400\sum_{k=2}^{10} {}_{10}\mathrm{C}_k(20)^{k-2} + 201
\end{aligned}
$$

よって，201

(2)

(i) $n=1$ のとき

$19^1+21^1=40$ より，400 で割り切れない。

(ii) $n\geq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
21^n &= (20+1)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k(20)^k \\
&= 20^2\sum_{k=2}^{n} {}_n\mathrm{C}_k(20)^{k-2} + {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 20^1 \\
&= 400\sum_{k=2}^{10} {}_n\mathrm{C}_k(20)^{k-2} + 20n + 1
\end{aligned}
$$

$$19^n=(20-1)^n$$
$$=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(20)^k(-1)^{n-k}$$
$$=20^2\sum_{k=2}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(20)^{k-2}(-1)^{n-k}+{}_n\mathrm{C}_0(-1)^n+{}_n\mathrm{C}_1 20^1(-1)^{n-1}$$
$$=400\sum_{k=2}^{10}{}_n\mathrm{C}_k(20)^{k-2}(-1)^{n-k}+20n(-1)^{n-1}+(-1)^n$$

より，

19^n+21^n を 400 で割った余りは $20n+1+20n\cdot(-1)^{n-1}+(-1)^n$ を **400** で割った余りである。

すなわち $20n\{1+(-1)^{n-1}\}+1+(-1)^n$ を **400** で割った余りである。

n が偶数のとき

$20n\{1+(-1)^{n-1}\}+1+(-1)^n=2$

よって，400 で割った余りは 2

n が奇数のとき

$20n\{1+(-1)^{n-1}\}+1+(-1)^n=40n$

n は奇数だから 10 の倍数にはなれない。よって， $40n$ は 400 で割り切れない。

よって， 19^n+21^n は 400 で割り切れない。

(i)，(ii)より， 19^n+21^n は 400 で割り切れない。

70

(1)

$$与式=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2$$
$$=a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)$$
$$=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

(2)

(1)および条件より，

$$(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2$$
$$=1\cdot1-1^2$$
$$=0$$

よって， $ad-bc=0$

$ac+bd=1$ ・・・①

$ad-bc=0$ ・・・②

とすると，

①×c＋②×d より， $a(c^2+d^2)=c$

よって，条件より， $a=c$ ・・・③

①×d−②×c より， $b(c^2+d^2)=d$

よって，条件より， $b=d$ ・・・④

③，④および条件より，

$a^2+d^2=a^2+b^2=1$

$b^2+c^2=d^2+c^2=1$

以上より，

$ad-bc=0$， $a^2+d^2=1$， $b^2+c^2=1$

71

(1)

$\dfrac{14}{3}<x<5$ より， $[x]=4$

$2<\dfrac{3}{7}x<\dfrac{15}{7}$ より， $\left[\dfrac{3}{7}x\right]=2$

よって，

$$\begin{aligned}\left[\frac{3}{7}x\right]-\left[\frac{3}{7}[x]\right]&=2-\left[\frac{12}{7}\right]\\&=2-1\\&=1\end{aligned}$$

(2)

$\left[\dfrac{1}{2}x\right]=k$ とおくと， $k\le\dfrac{1}{2}x<k+1$ より， $2k\le x<2k+2$

よって， $[x]$ は $2k$ または $2k+1$ となるから， $\dfrac{1}{2}[x]$ は k または $k+\dfrac{1}{2}$ $\therefore\left[\dfrac{1}{2}[x]\right]=k$

ゆえに， $\left[\dfrac{1}{2}x\right]-\left[\dfrac{1}{2}[x]\right]=k-k=0$

(3)

$\left[\dfrac{1}{n}x\right]=m$ とおくと， $m\le\dfrac{1}{n}x<m+1$ より， $mn\le x<mn+n$

よって， $[x]$ は $mn,\ mn+1,\ \cdots,\ mn+n-1$ のいずれかである。

したがって， $\dfrac{1}{n}[x]$ は $m,\ m+\dfrac{1}{n},\cdots,\ m+\dfrac{n-1}{n}$ のいずれかであり，これより， $\left[\dfrac{1}{n}[x]\right]=m$

ゆえに， $\left[\dfrac{1}{n}x\right]-\left[\dfrac{1}{n}[x]\right]=m-m=0$

72

(1)

$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ より，$2\omega + 1 = \sqrt{3}i$

両辺を 2 乗すると，$4\omega^2 + 4\omega + 1 = -3$ より，$4\left(\omega^2 + \omega + 1\right) = 0$　$\therefore \omega^2 + \omega + 1 = 0$　・・・①

①より，$\omega^3 - 1 = (\omega - 1)\left(\omega^2 + \omega + 1\right) = 0$　$\therefore \omega^3 = 1$　・・・②

①，②より，

$\omega^2 + \omega^4 = \omega^2 + \omega^3\omega = \omega^2 + \omega = -1$

$\omega^5 + \omega^{10} = \omega^3\omega^2 + \left(\omega^3\right)^3\omega = \omega^2 + \omega = -1$

(2)

k を負でない整数とする。

$n = 3k$ のとき

$$\omega^n + \omega^{2n} = \omega^{3k} + \omega^{6k} = \left(\omega^3\right)^k + \left(\omega^3\right)^{2k} = 1 + 1 = 2$$

$n = 3k + 1$ のとき

$$\omega^n + \omega^{2n} = \omega^{3k+1} + \omega^{6k+2} = \left(\omega^3\right)^k \omega + \left(\omega^3\right)^{2k} \omega^2 = \omega + \omega^2 = -1$$

$n = 3k + 2$ のとき

$$\omega^n + \omega^{2n} = \omega^{3k+2} + \omega^{6k+4} = \left(\omega^3\right)^k \omega^2 + \left(\omega^3\right)^{2k+1} \omega = \omega^2 + \omega = -1$$

(3)

$$\begin{aligned}(\omega+2)^n + \left(\omega^2+2\right)^n &= \sum_{i=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_i \omega^i 2^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_i \omega^{2i} 2^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_i 2^{n-i}\left(\omega^i + \omega^{2i}\right) \\ &= 2^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_i 2^{n-i}\left(\omega^i + \omega^{2i}\right)\end{aligned}$$

ここで，(2)より，$\omega^i + \omega^{2i}$ は -1 または 2 である。

よって，$(\omega+2)^n + \left(\omega^2+2\right)^n$ は整数である。